対称性の一般化とクォーク閉じ込め再考

谷崎 佑弥

基礎物理学研究所

Quantum ChromoDynamics

- Fundamental theory for strong interaction (Nuclear/Hadron physics)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi .$$

- Quarks Ψ & Gluons A_μ have color degrees of freedom.
  They do not appear in the asymptotic states $\Rightarrow$ **Color confinement**

- My research goal:

  Achieve deeper understandings on quark confinement,
  & Explore associated/related interesting phenomena.

それでM1（2011年）の時に師匠の初田さんに「閉じ込め問題」が不思議だからやってみたい、というようなことを伝えました。
ただ当時これについて大きな進展が周りであったわけではなかったので、「まずはできる研究テーマを探しつつ、勉強もしてアンテナを張ってブレークスルーがあった時に見逃さないようにするのが大事じゃないか」という趣旨のことを言われたと記憶しています。

↳ これが後々役に立つ

とじ込めについて

color electric flux is collimated as a 1D string-like object.

⇒ Color electric energy diverges in the infinite volume.

⇒ No finite-energy single quark state. (Confinement!)

○ How does the confinement happen?

⇒ What causes the collimation of the color electric flux?

Possible Scenarios

- monopole condensation
- center-vortex proliferation

(Nambu, Mandelstam, Polyakov, 't Hooft, ... in '70s
Supersymmetric realization by Seiberg, Witten in '90s.)

↑ 非可換ゲージ理論には magnetic charge / magnetic flux をもつ soliton 達がいるので、強結合領域でそれらが軽くなって閉じ込めを引き起こす。

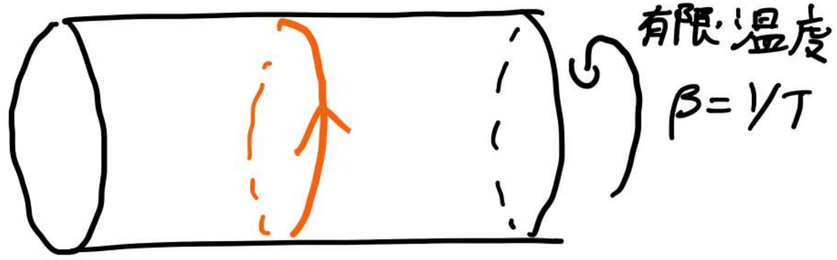
とじ込めと center symmetry

○ quark がとじ込められた状態と解放された状態は本質的に違う？

↑ もし dynamical quark が十分重ければ，center symmetry の自発的破れで区別される．
（現実では軽いので物質の相としては crossover）

$$\langle P \rangle = \exp\left[-\beta \times \left(\begin{array}{l}\text{quark 1つ系に加えた} \\ \text{free energy}\end{array}\right)\right]$$

- confined ⇒ ∞
- deconfined ⇒ 有限．



P : Polyakov loop.

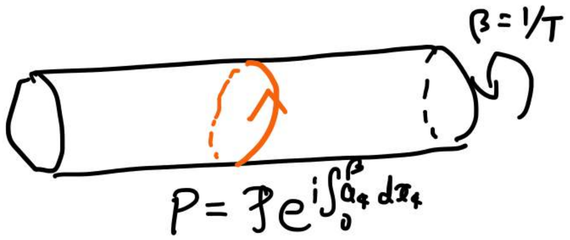
Pure YM theory（dynamical quark がない理論）では，

$$P \to e^{\frac{2\pi i}{N}} P$$

とその phase を回す symmetry がある．（center symmetry）

Formulation of $\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry (Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willet '14)

○ 70年代から有限温度の confinement / deconfinement transition に対して Polyakov loop P に作用する $\mathbb{Z}_N$ center symmetry ($P \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N}} P$) の重要性は知られていた.



だが 2014 以前は, finite-T にして時空をまるめると aperiodic gauge trans. が突然出てくる symmetry で深く理解していなかった (少なくとも私は).

○ D2 の時 (2014の夏) に Misha Stephanov と Ho-Ung Yee を訪ねて数ヶ月 UIC にいた時, Seiberg が Chicago 大で talk すると話題になって postdoc の人らと一緒に聞きに行く. そこで, **generalized global symmetry** の話を初めて聞いた. (これは運が良かった!)

(論文が出る前に)

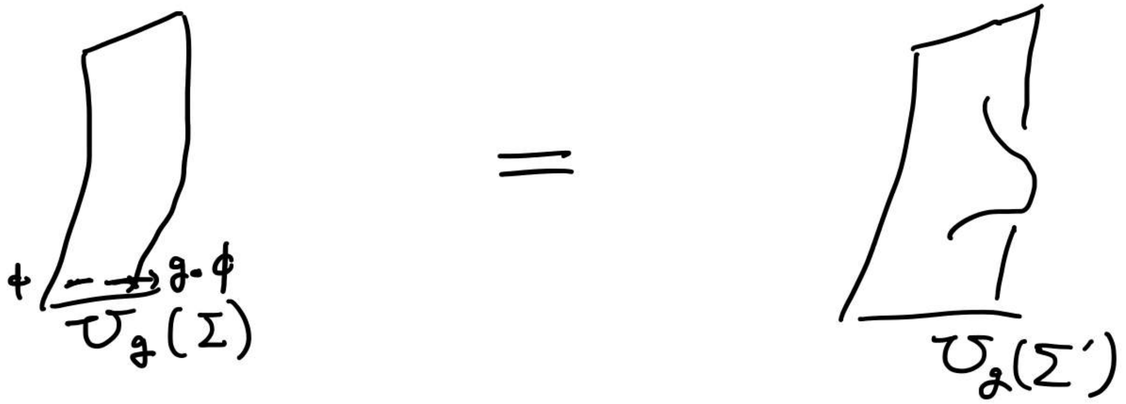
当時の私の印象

- 色々と clear になって興味深い. (特に, 't Hooft の 'tHooft-loop あたりの全く分からなかった論文が少しは理解できた気にはなる.)
- でも知られている事に対する reformulation 以上のものを含むのかが当時は判断できなかった...
- あと, fundamental quark を入れて QCD にすると結局この symmetry は壊れちゃうかもな...

Generalized Symmetry (in 2014) = (Invertible) Topological Defect

- SUGRA has various higher-form U(1) gauge fields.
  What is the global-symmetry counterpart? ⇒ Higher-form symmetry.

- Symmetry generator ⇐ Twisted B.C. associated with the conservation law.
  = topologicalness of the defect



- Ordinary symmetry (0-form sym): Symmetry defect has the codim-1.

  p-form symmetry : — ≠ — has — ≠ — (p+1).

  ⇒ This naturally acts on a p-Dim. object.

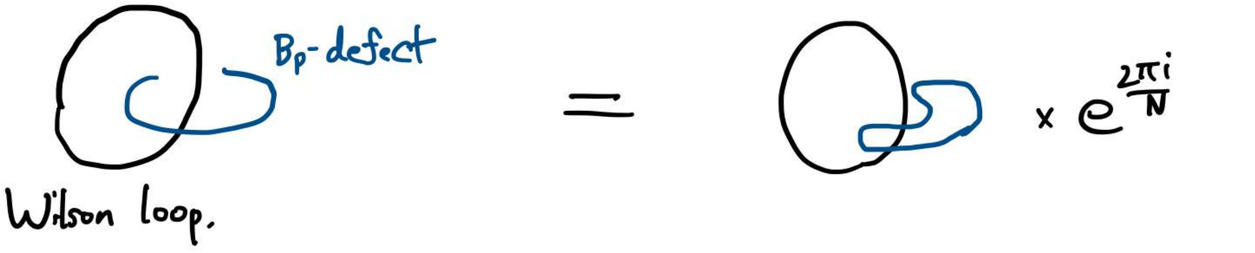
$\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry in SU(N) Yang-Mills

- このように見直すと，実際に SU(N) Yang-Mills に対して，codim-2 topological defect が作れる．

（例えば，Wilson lattice に

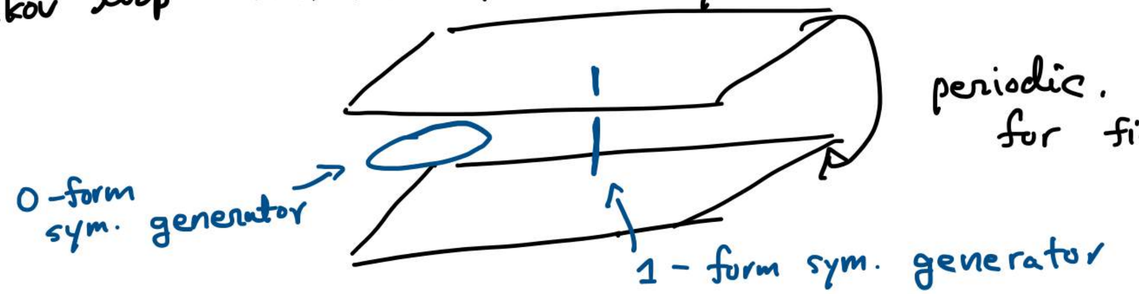
$$S[U_\ell, B_p] = -\beta \sum_p \left(e^{\frac{2\pi i}{N} B_p} \mathrm{tr}(U_p) + \text{c.c.} \right)$$

と $\mathbb{Z}_N$ plaquette variable B_p をくっつけて，その背景場のゲージ変換をすれば右確認できる．



- 時空を丸めると 1-form sym. が自然に低次元理論の 1-form sym. と 0-form sym. が従う．

Polyakov loop に作用する $\mathbb{Z}_N$ center symmetry は，この派生した 0-form symmetry．

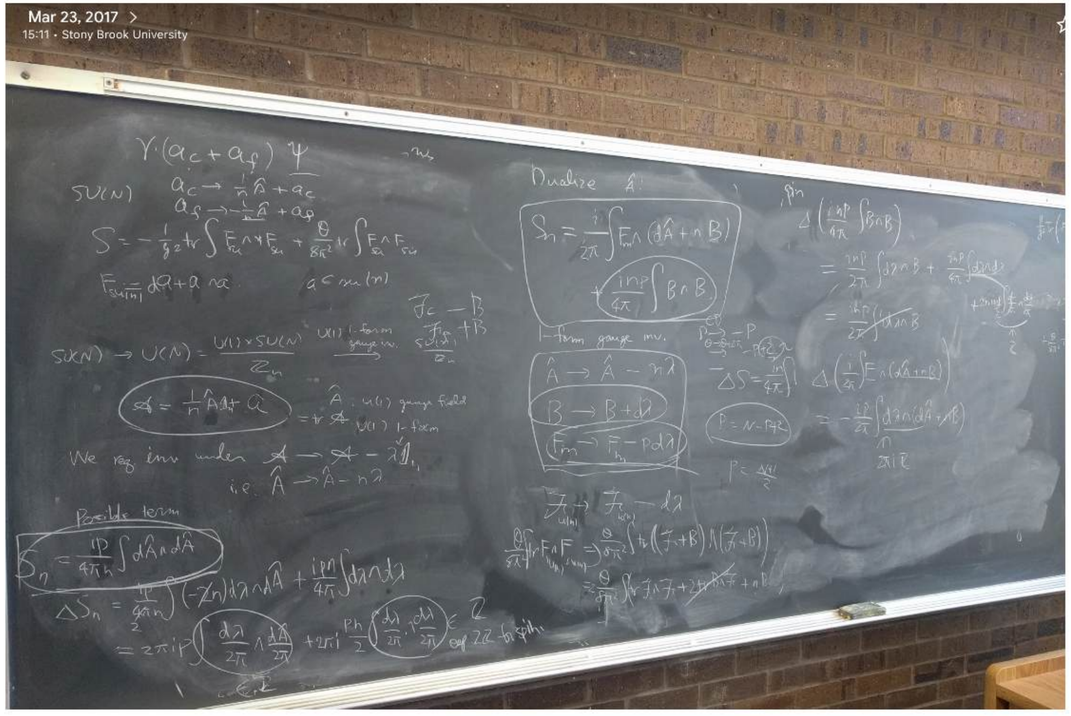


- いつもの symmetry のように gauge field に結合させられる．（← この重要さを私は全く理解していなかった！）

時は流れて 2017年

○ 理研 BNL (NYのLong Islandにある) で postdoc 1年目が終わるあたりで，
有名な Theta, Time Reversal, Temperature (Gaiotto, Kapustin, Komargodski, Seiberg) '2017 が出る．

その翌日，京大の学生で Dima Kharzeev の所に来ていた菊池くんに「すごそうな論文が出てますよ！」って教えてもらって，確かにすごい！ ということで2人で解読する．



(Jac Verbaarschot の office で菊池君と議論した証拠)

⇒ せっかくだから研究までもっていこう！ となって Bifundamental QCD への応用に着手する．

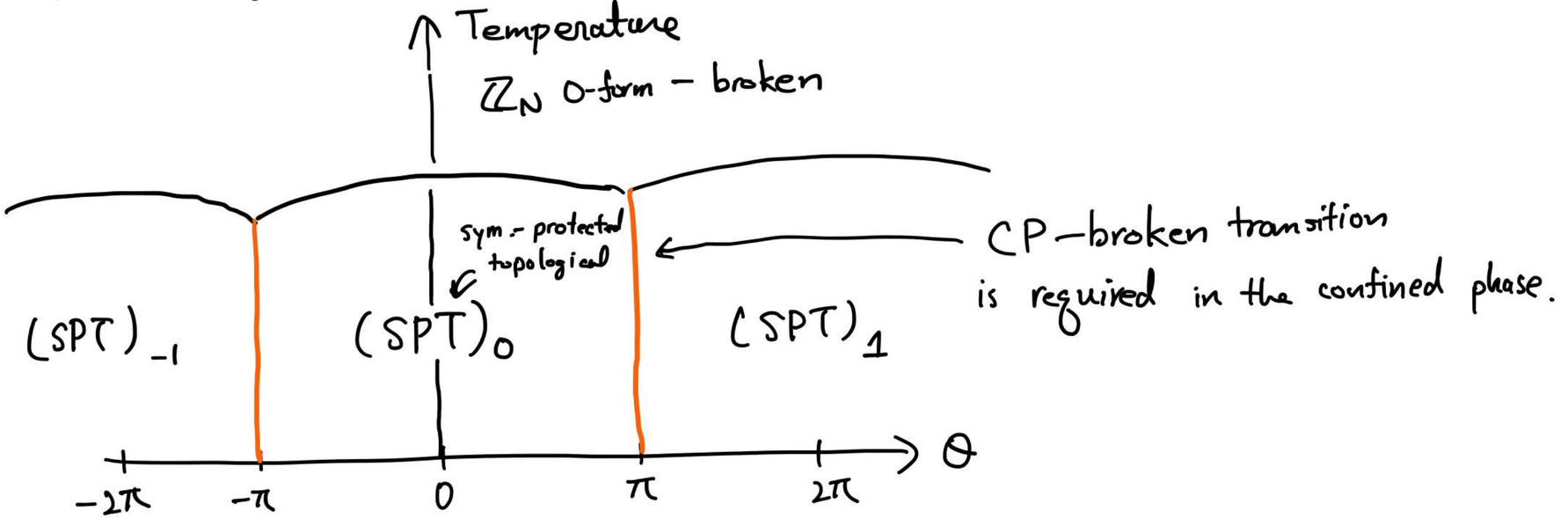
Theta, Time Reversal, Temperature (by Gaiotto et al. 2017)

- Introducing the background gauge field B for $\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry, the instanton number is shifted by $\frac{1}{N}$: (van Baal '82)

$$Q_{top}[A,B] = -\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{2}B\cup B + \text{integer}[A,B]$$

$$\Rightarrow \quad Z_{\theta+2\pi}[B] = e^{-\frac{2\pi i}{N}\int\frac{1}{2}B\cup B}\, Z_\theta[B].$$

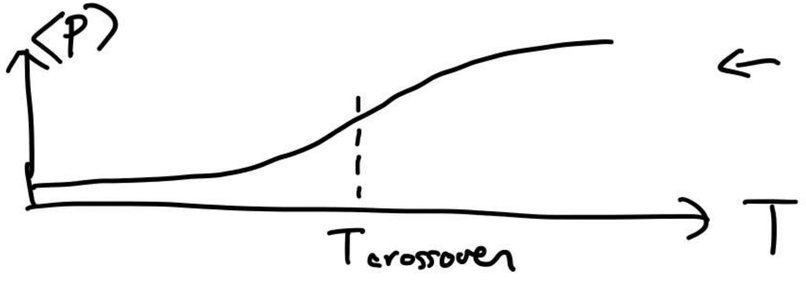
- They interpret this relation as a kind of **'t Hooft anomaly**, and its anomaly matching condition constrains the possible phase diagrams.



さて，どこに応用しようか？

- Theta, Time Reversal, … は pure YM で matter がない場合に注目していた．
- Hadron Physics としては（理想的でも良いから）quark もいる場合が知りたい。

  しかし，quark がいると confinement / deconfinement は crossover で相転移じゃない．



← quark が $\mathbb{Z}_N$ 1-form sym. を壊すせいで
ずっと order parameter が nonzero.

- 最初に思いついたのは，3-color 3-flavor QCD の twisted B.C. への応用の可能性．
  （H. Kouno et al. '12 ～）

  quark の B.C. をうまく flavor dependent にすると，quark が S^1 方向に N 回巻をつかないと
  free energy に effect がなくなって，$P \to e^{\frac{2\pi i}{N}} P$ の sym. が exact。
  この件で confinement / deconfinement の区別が出来るから，quark があっても
  同じことが出来る？

Bifundamental QCD

○ という事で，$\mathbb{Z}_N$-twisted N-color N-flavor QCD にトライするけれども，(まだ知識も実力も足りず) 行きづまる.

↳ SU(N) flavor symmetry も初めから dynamical gauge field と結合させておけば (QCD(Bifund)),

$\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry が built-in で もっと容易に応用できるじゃん!

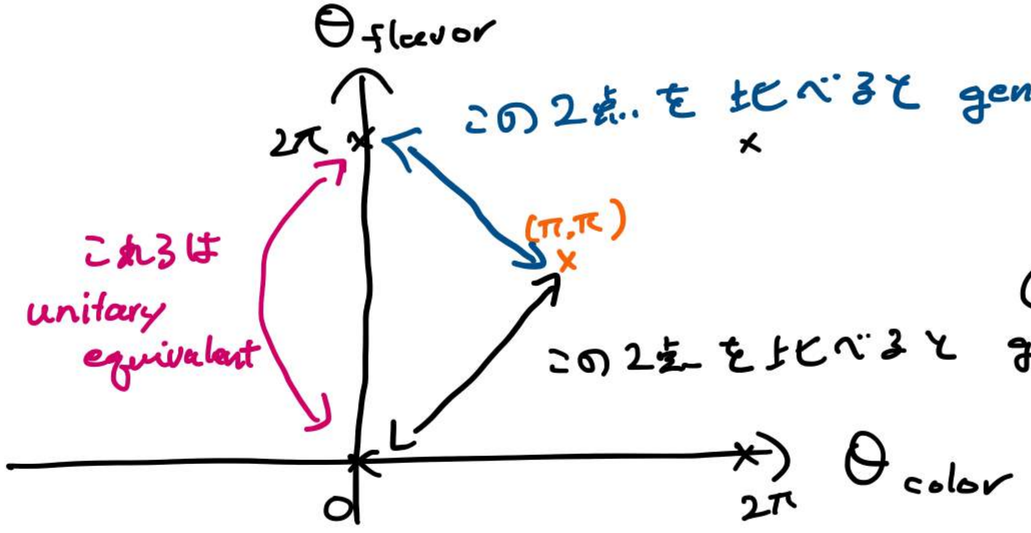
基本的な計算手法は Theta, Time Reversal, ... と同じなのでサクサク進むが ---

θ-angle の相図への anomaly matching が彼らの主張をそのまま信じると何かおかしい.

$$Z_{\theta_{color}+2\pi n_1,\,\theta_{flavor}+2\pi n_2}[B] = e^{-\frac{2\pi i(n_1+n_2)}{N}\cdot\frac{1}{2}\int B\cup B} Z_{\theta_{color},\theta_{flavor}}[B]$$

Generalized anomay for QCD(BF)

Generalized anomaly を $(\theta_{color}, \theta_{flavor})$-plane で見ると ...



この2点を比べると generalized anomaly が出ない.

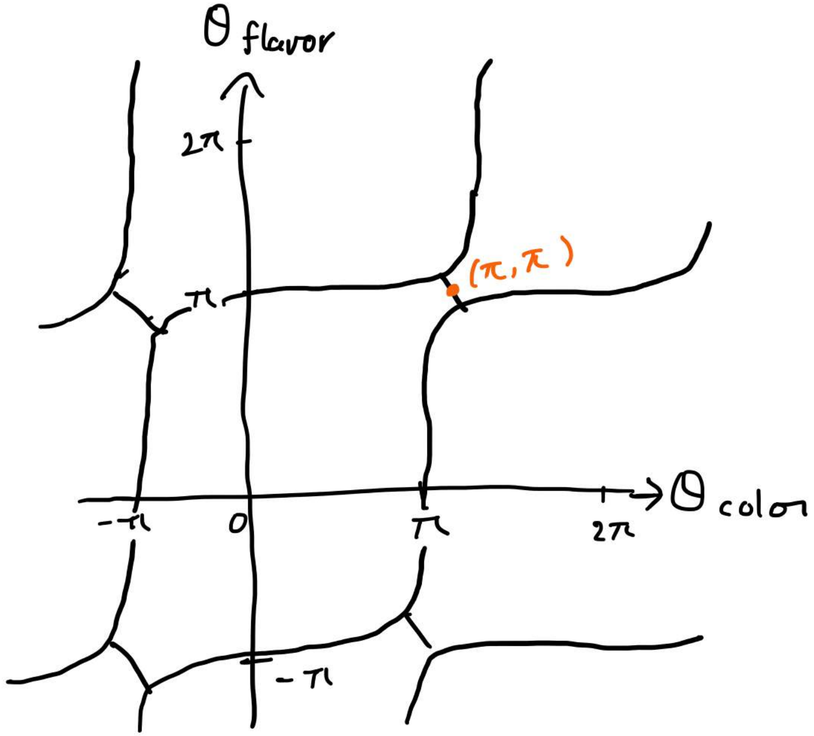
この2点を比べると generalized anomaly がある. (global inconsistency)

⇝ この不整合から, global inconsistency の表れとして anomaly matching pattern として, SPT state の pumping が bを生まれることに気づく. (Kikuchi, YT '17 ; 後に coupling-space anomaly として より整備される. (Cordova, et al.))

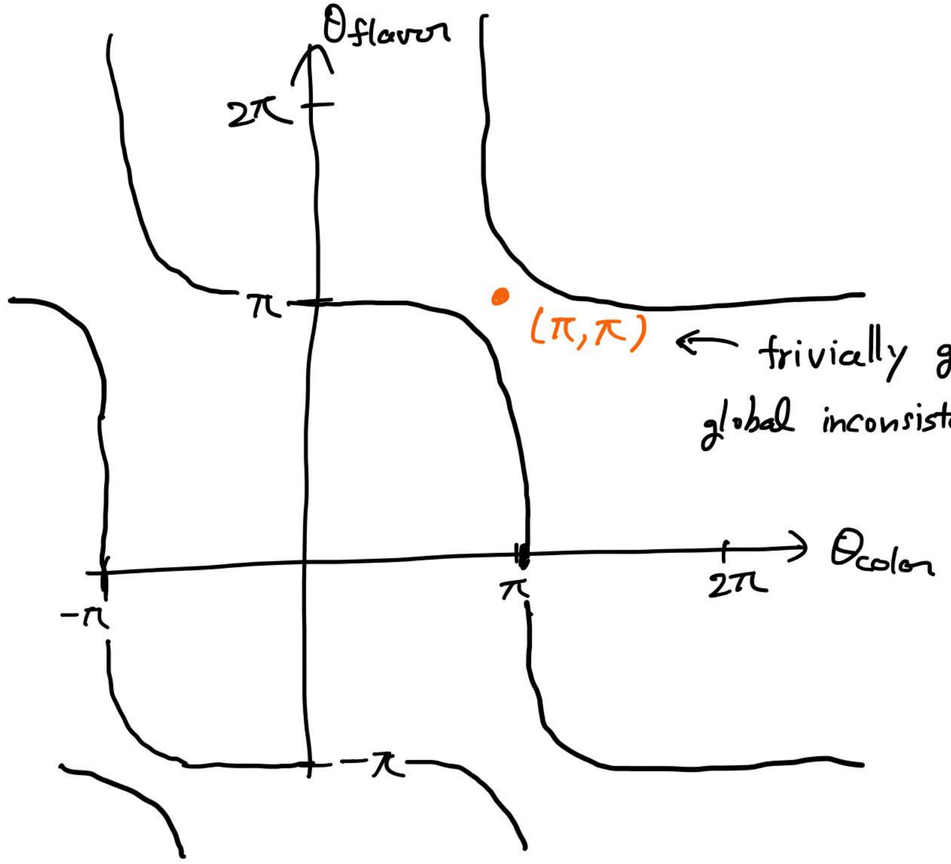
Anomaly matching for global inconsistency

当時ひねり出した QCD(BF) の θ_{color}-θ_{flavor} plane での minimal な相図：

可能性1



可能性2



← trivially gapped だが，global inconsistency を満足する．

[ちなみに，QCD(BF) への結論に対しては見落としていた対称性まで考慮すると実は (π,π) で genuine anomaly が出る．(Hayashi, YT, Watanabe '23, '24)
逆に，これに初めから気づいてしまっていたら，global inconsistency の発見はなかったかも?!]

じゃあ $\mathbb{Z}_N$-twisted QCD の相図は？

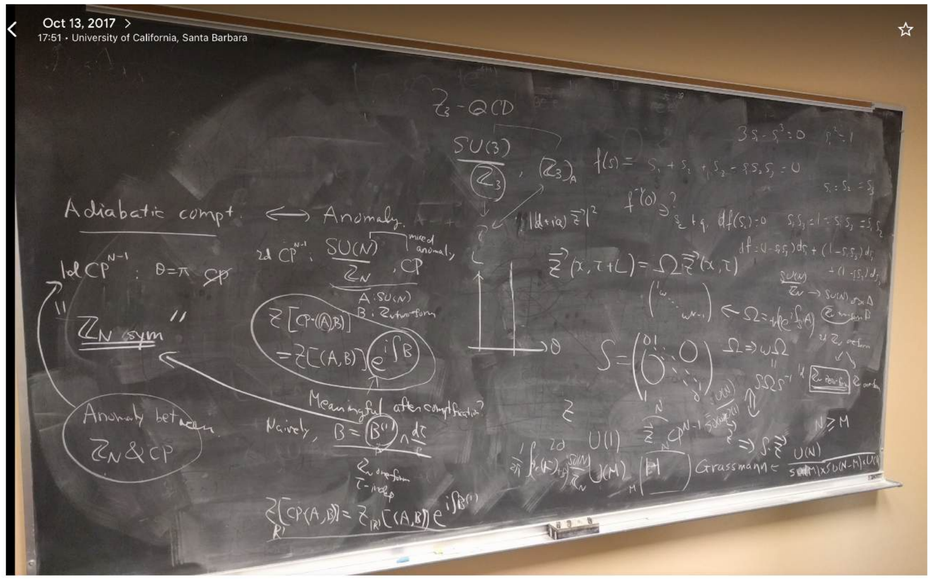
- QCD(BF) は N-color N-flavor QCD の $SU(N)_{\text{flavor}}$-gauged version.
  - ↑ ここにある $\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry は、QCD の flavor symmetry が $SU(N)$ ではなく $\frac{SU(N)}{\mathbb{Z}_N}$ $(=PSU(N))$ なのに $SU(N)_{\text{flavor}}$ として ゲージ化 した 事 起因.

$$\left(\frac{SU(N)}{\mathbb{Z}_N}\right)_{\text{flavor}} \xrightarrow{SU(N)\ \text{gauging}} \mathbb{Z}_N \text{ 1-form symmetry}$$

(Seifnashri, Seiberg '25 で言うところの symmetry transmutation)

特に、米倉さんの Shimizu, Yonekura 2017 で、この事実を使えば flavor を dynamical gauge field まで 持上げ しなくとも 新しい anomaly が 出せる 事が 明らかにされる.

- $\mathbb{Z}_N$-twisted QCD の anomaly も分かる！ (Kikuchi, Misumi, Sakai, YT '17)



(坂井さん, 三角さん と Santa Barbara で 議論した 記憶. 2017 秋)

Discrete anomaly for QCD in chiral limit

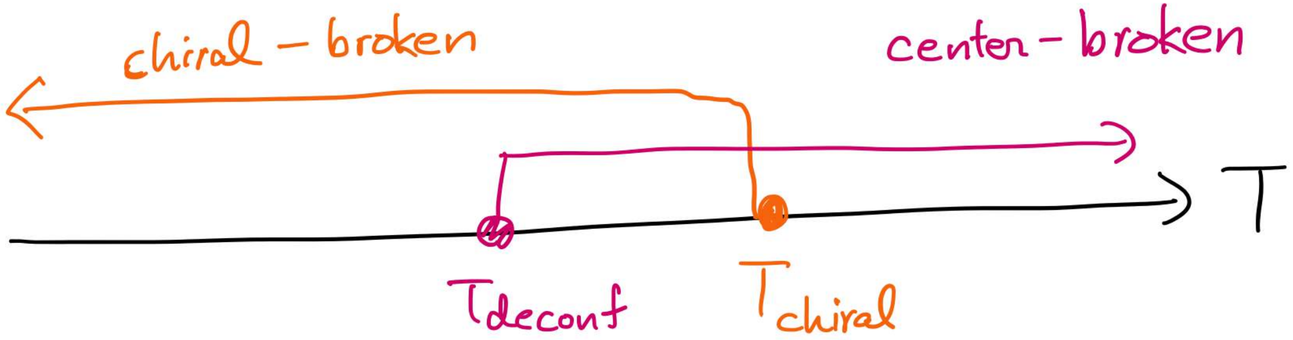
- Chiral limit での N_c-color N_f-flavor QCD の対称性は,

$$\frac{SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V}{\mathbb{Z}_{N_c} \times \mathbb{Z}_{N_f}}$$

離散散 anomaly の議論では この quotient が本質的.

- これを正しくゲージ化すると, $N_c = N_f$ で $\mathbb{Z}_N$-twisted B.C. をとったとき, anomaly matching がる trivially gapped phase が排除される:

$$T_{\text{deconf}} \leq T_{\text{chiral}}$$



(Kikuchi, Misumi, Sakai, YT '17; cf. Shimizu, Yonekura '17 for Roberge-Weiss)

[ちなみに, large-N で holographic model (Sakai, Sugimoto '05) で計算しても常にこの関係は成り立っている (Aharony et al '07)]

Symmetry の知識が色々と進んで

- 1-form symmetry の定式化

  ⟹ • center symmetry の系統的取扱い.

  • 特にそのゲージ化による新しい anomaly matching condition の発見.

- QCD への応用

  • QCD に 1-form sym. は無いけれど，対称性の global structure にその名残りがある:

$$\frac{SU(N_f) \times U(1)}{\mathbb{Z}_{N_c} \times \mathbb{Z}_{N_f}}$$

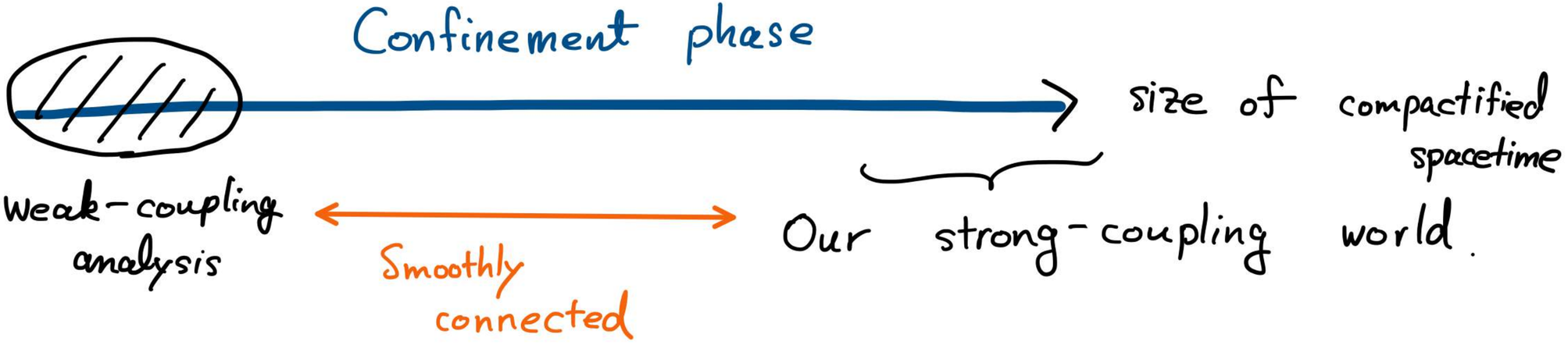
  • Discrete anomaly にとっては，ここから来る 2-form gauge field が本質的.

これらは理論の対称性のみから決まる厳密な性質（kinematic）.

⟹ うまく Confinement dynamics/mechanism に応用したい！

Adiabatic Continuity to Weak-Couplings

We would like to improve our understandings about microscopic mechanism of confinement and related phenomena.



cf. · Twisted Eguchi-Kawai model (González-Arroyo, Okawa)

· Double-trace deformed YM or YM theory w/ adjoint fermions } on $\mathbb{R}^3 \times S^1$ (Ünsal, ... 2007–)

Connecting dynamics from 4D to 2D

- YM/QCD on $\mathbb{R}^2 \times T^2 \Rightarrow$ 2D effective theory on $\mathbb{R}^2$

  4D としての dynamics を 2D theory として出来るだけ再現したい.

方針：とりあえず dynamics に制限を与える重要なアノマリーは残す！

4D YM : $Z^{(4D)}_{\theta+2\pi}[B] = e^{\frac{2\pi i}{N}\int B\cup B}\, Z^{(4D)}_{\theta}[B]$

T^2- compactification

't Hooft twist.

$$B = B_{2d} + A\,\frac{dx_3}{L} + \tilde{A}\,\frac{dx_4}{L} + \mathcal{P}\,\frac{dx_3\wedge dx_4}{L^2}$$

$$Z^{(2D)}_{\theta+2\pi}[B_{2d}, A, \tilde{A}] = e^{\frac{2\pi i}{N}\int(\mathcal{P}B_{2d} - A\cup\tilde{A})}\, Z^{(2D)}_{\theta}[B_{2d}, A, \tilde{A}]$$

't Hooft twist $\mathcal{P}$ を適切に ($\gcd(N,\mathcal{P})=1$) 入れた時のみ,

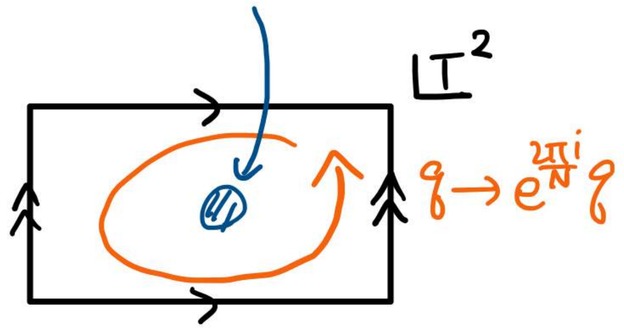
2D theory としての 1-form symmetry と θ-periodicity のアノマリーが残る.

[Misumi, Sakai, YT '17; Yamazaki '17]

Conjecture (YT, Ünsal, '22)

YM, QCD on $\mathbb{R}^2 \times T^2$

w/ 't Hooft flux



Weak-coupling description

$\Longleftrightarrow$

Adiabatic Continuity

YM, QCD on $\mathbb{R}^4$

Strong-couplings

via Center Vortices

(Related works:
van Baal '84 (thesis), Yamazaki, Yonekura '17, Cox, Poppitz, Wandler '21 on $T^3 \times \mathbb{R}$)

Fractionalization of 4d instantons

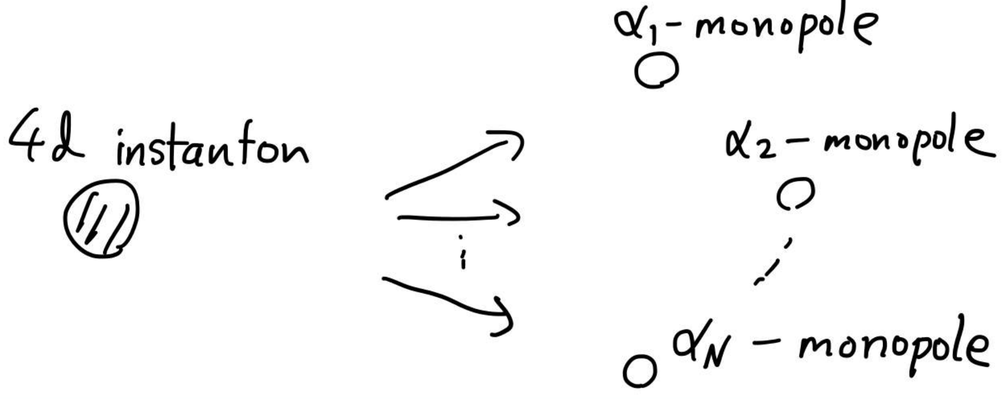
○ 4d SU(N) gauge theory has a topological configuration called an instanton:

$$Q_{top} = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}(F\wedge F) = \pm 1.$$

- 但し，instanton それ自体は dipole-like object で，これが たくさん いても 閉じ込めを うまく 説明 できない．
- この instanton は 4N という巨大な moduli space をもつ

○ Let's consider an instanton on $\mathbb{R}^3\times S^1$ w/ nontrivial Polyakov loop VEV: $P|_{x\to\infty}\neq \mathbb{1}$.

Then

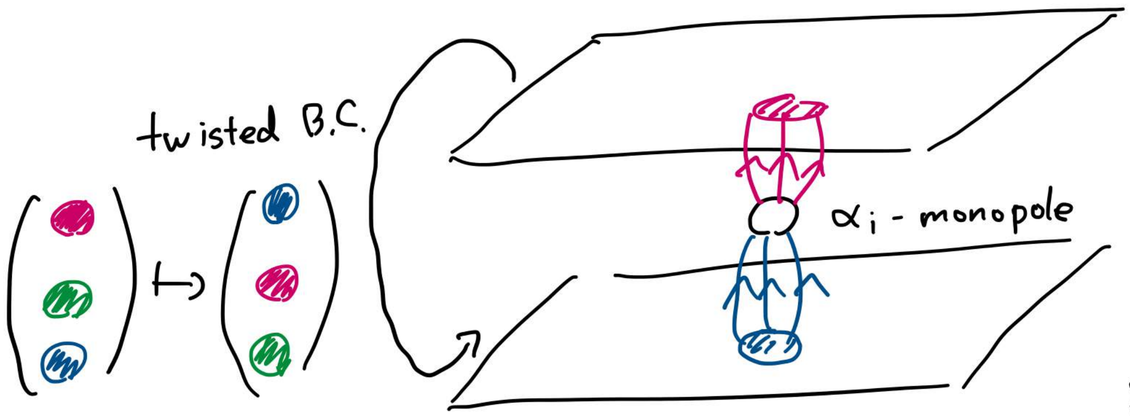


N monopole constituents.

(Lee - Yi '96
Kraan - van Baal '97)

monopole-constituent $\Rightarrow$ center vortex

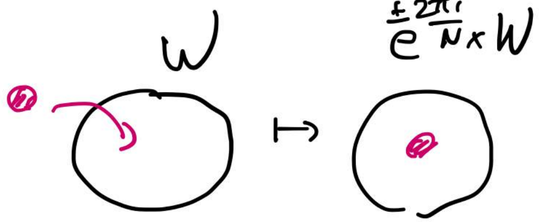
この monopole 配位を $\mathbb{R}^2 \times \underbrace{S^1 \times S^1}_{B\text{-flux}}$ ともう一方向まるめると，monopole が出る石森東が S^1 方向にまきついて center vortex になる：

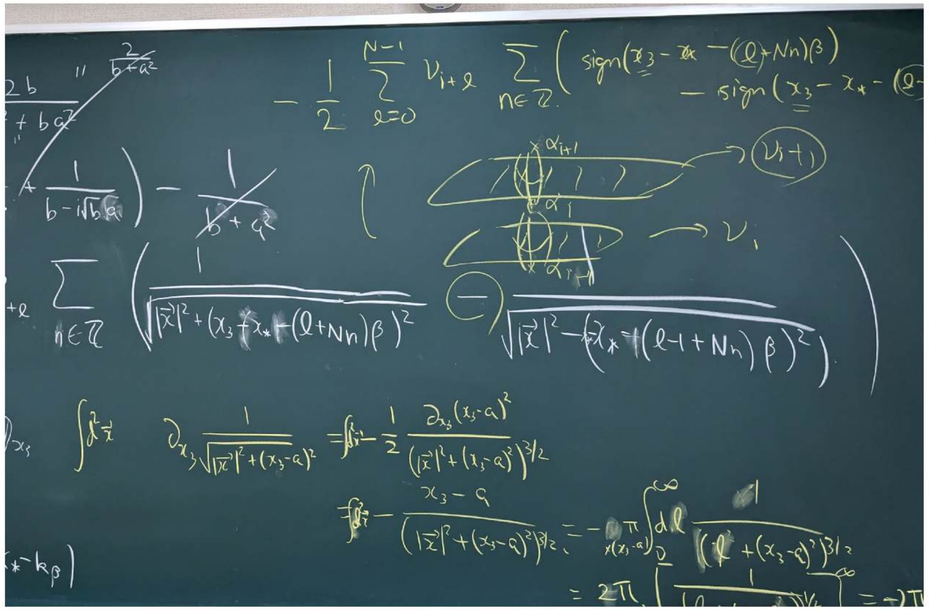


$\alpha_i = \nu_i - \nu_{i+1}$

Properties

$$\begin{cases} S_{YM} = \dfrac{8\pi}{g^2 N} \\ Q_{top} = \pm \dfrac{1}{N} \end{cases}$$





（林さんとの議論の跡 @基研 in 2024春）

YM on $\mathbb{R}^2 \times \underbrace{T^2}_{\text{B-flux}}$ $\Rightarrow$ 2D gas of center vortices.

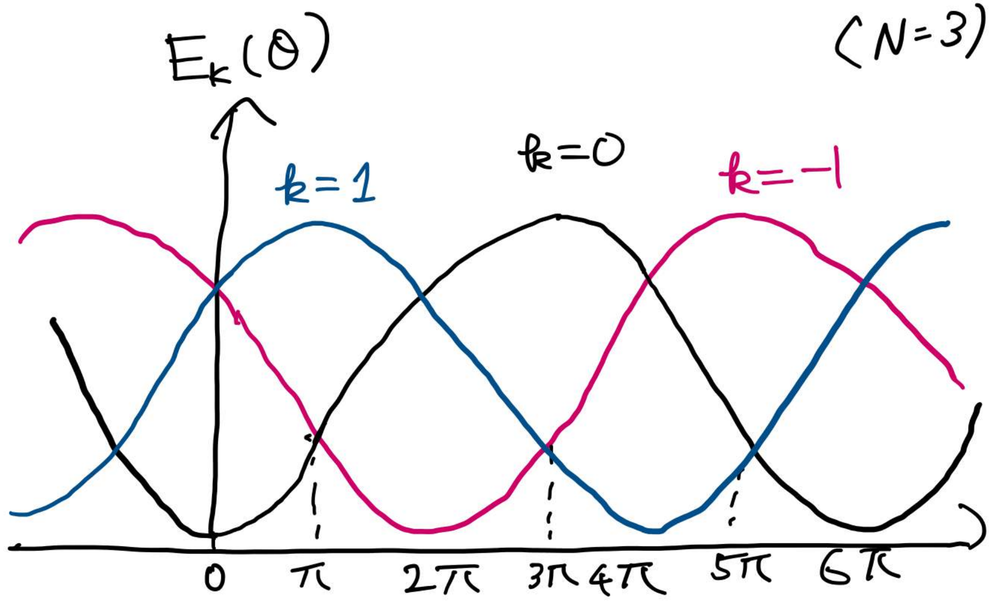
4次元理論を confinement の性質を保って 2次元理論まで簡約できる.

(Semiclassical calculation が信用できるのは, $NL\Lambda \ll 1$ (L: T^2のサイズ).
もちろん numerical には L を変えて, 実際に 2D description から 4D theory までの変化を追えて, SU(2) の場合には adiabatic continuity が一部 check されている. (Bergner, Gonzalez-Arroyo, Solan '25))

$$Z = \sum_{n,\bar{n}\geq 0} \frac{1}{n!\bar{n}!} \left(\int_{\mathbb{R}^2} d^2x\, e^{-\frac{8\pi}{g^2N} + i\frac{\theta}{N}}\right)^n \left(\int d^2x\, e^{-\frac{8\pi}{g^2N} - i\frac{\theta}{N}}\right)^{\bar{n}}$$

$$\times\ \delta_{n-\bar{n}\in N\mathbb{Z}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \exp\left[-\int d^2x \underbrace{\left(-2e^{-\frac{8\pi}{g^2N}} \cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{N}\right)\right)}_{\text{Ground-state energy density } E_k(\theta)}\right].$$



$\Rightarrow$ Multi-branch θ-vacua associated with confinement.

QCD への implication

- この設定は一般の N_c-color N_f-flavor QCD にも応用できる.

($U(1)_{\text{baryon}} = \dfrac{U(1)_{\text{quark}}}{\mathbb{Z}_{N_c}}$ を使って, $\int_{T^2} dA_{\text{Baryon}} = 2\pi$ とすると gauge sector に B-flux が入る.)

4d-2d continuity:

> 4d QCD on $\mathbb{R}^2 \times \underbrace{T^2}_{\int dA_B = 2\pi}$ $\Longrightarrow$ 2d Schwinger model (w/ charge-N Higgs)

この対応で計算すると, $U(1)_A$-violation が conventional det-type vertex ではなくなる:

Kobayashi-Maskawa-'t Hooft vertex

$$e^{-\frac{8\pi}{g^2}} \cos(\eta' + \theta) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{N}\text{-fractionalized vertex}$$

$$e^{-\frac{8\pi}{g^2 N}} \cos\left(\frac{\eta' + \theta + 2\pi k}{N}\right)$$

(YT, Ünsal '22 ; Hayashi, YT '24)

$\frac{1}{N}$ - fractionalized Kobayashi-Maskawa-'t Hooft vertex & とじ込め

- 2022 に Mithat との論文を仕上げた時は，

  「何故か知らないけど，large-N での Witten-Veneziano relation が具体的に実現できた」

  程度の感想で，その物理的な意味は良く分かっていなかった．

⇒ 林さんに「この global な構造の変更は anomaly から従って面白い物理がありますよ！」って教えてもらう．

$k = 0, 1, \cdots, N-1$: pure YM でとじ込め真空の SPT としての label

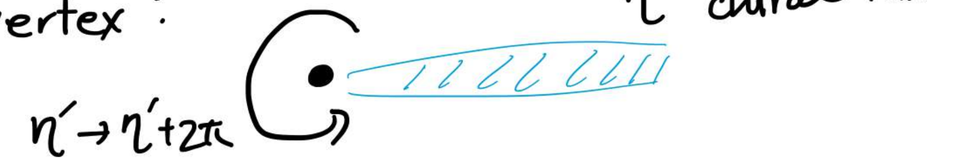
$$V(\eta', k) = -e^{-\frac{8\pi}{g^2 N}} \cos\left(\frac{\eta' + \theta + 2\pi k}{N}\right)$$

$(\eta' + 2\pi, k) \sim (\eta', k+1)$: chiral condensate の phase がぐるっと一周すると，SPT としての label が 1 ずれる．

⇒ η' ($U(1)_A$) の物理は global な confinement mechanism の詳細へのアプローチの金建 !?

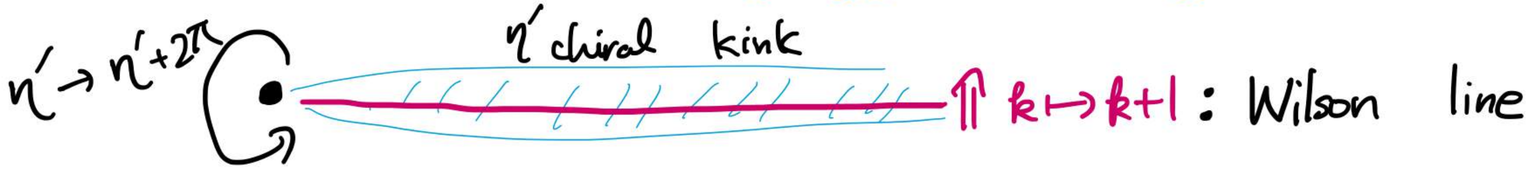
η' – Vortex

Usual KMT vertex :



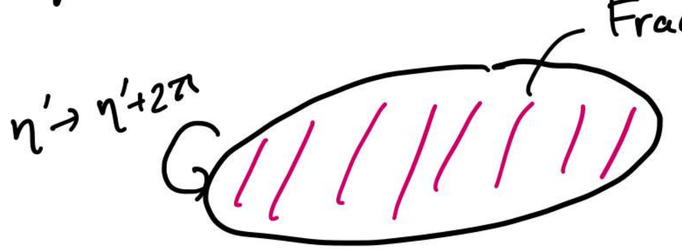
$\frac{1}{N}$ fractionalized vertex : $V(\eta', k) = -\cos\left(\frac{\eta' + \theta - 2\pi k}{N}\right)$ does not come back even if we shift $\eta' \to \eta' + 2\pi$.

k should also jump!



$\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^2 \times T^2_{\text{twist}}$, **$\eta'$ – vortex = quark.**

This corresponds to the 2d reduction of the "pancake baryon" construction. (Komargodski 1812.09253)



Summary

- QCD, 非可換ゲージ理論は50年以上の歴史がある成熟した分野で, これまで既に多くのideasが生まれ試されてきた.

- generalized symmetry, anomalyも実はヒントは過去の研究にも多くあったけど, その本質を抽出し理解するのは2010年代までかかった.

⇒ 温故知新でこれらを組み合わせて面白い発見をしたい!

- 特に $U(1)_A$-violationに伴う η' の大域的構造はまだ深めることがありそう.

- 最後に: QCD(-like) theoriesは非摂動的物理の宝庫!